

Materials per a construir mosaics... i matemàtiques!

Anton Aubanell

A vegades sembla que les activitats d'experimentació i els materials manipulables són especialment adequats per a l'educació infantil i primària, però que ja no ho són tant per a l'ESO o el batxillerat, com si la progressiva necessitat de cultivar l'abstracció s'adigués poc amb l'ús de materials en l'aprenentatge, com si l'abstracció i els materials s'exclouessin mútuament.

Probablement podríem discutir si les matemàtiques són o no una ciència experimental, però l'educació matemàtica, el procés de construcció del coneixement matemàtic, sí que hauria de tenir un important component experimental en qualsevol de les etapes educatives, des de l'educació infantil fins a la formació universitària. És innegable el benefici de l'ús de materials manipulables en les primeres etapes educatives (Maria Montessori deia que «el nen té la intel·ligència a les mans»), però també sembla clar que les activitats d'experimentació (sigui amb materials manipulables, sigui amb eines tecnològiques com el GeoGebra) poden fer excel·lents contribucions en cursos més avançats tant per a la introducció d'idees com per a la seva aplicació concreta. En són exemples algunes experiències clau en el camp de les còniques (construcció amb regles i fils, doblegant paper i amb eines de geometria dinàmica, estudi de les propietats focals amb els rebots d'un làser...), l'experimentació i descoberta de determinades relacions en geometria plana, el treball sobre la distribució binomial mitjançant la màquina de Galton, les activitats de probabilitat geomètrica basades en el llançament de monedes sobre tramats (les monedes de Buffon i les seves variants) o els models materials per a l'estudi de la regressió lineal. En tots aquests casos (i en molts d'altres que es podrien citar), els materials no tan sols serveixen per a motivar i introduir conceptes, sinó que obren portes i conviden a l'aprofundiment.

L'essencial component abstracte i formal del coneixement matemàtic no exclou la potència del suport experimental ni es contraposa a la intuïció i a l'experiència del concret. Ben al contrari, els materials manipulables i l'abstracció poden ser grans aliats, especialment

en situació d'aprenentatge. Les activitats experimentals amb materials ens poden ajudar a construir idees abstractes i a donar-hi un major significat. Les idees abstractes poden obrir noves perspectives en la mirada que fem sobre un objecte, una experiència o una situació concreta. George Pólya¹ cita la frase de Kant «Tot coneixement humà comença amb intuïcions, continua amb concepcions i finalitza amb idees» (I. Kant: *Crítica de la raó pura*) i en fa la lectura didàctica següent: «L'aprenentatge comença amb acció i percepció, continua amb paraules i conceptes, i ha de finalitzar amb hàbits mentals desitjables. [...] "Acció i percepció" us han de suggerir manipular i veure coses concretes com pedres, o pomes, o reglets Cuisenaire; o regle i compàs; o instruments en un laboratori". A vegades, en educació matemàtica, alguns temes s'han plantejat en termes d'exclusió (experimentació *versus* abstracció, intuïció *versus* formalisme, materials *versus* TIC, calculadora *versus* càlcul mental...) en lloc de plantejar-se en termes d'integració, de complementarietat, de reforçament mutu. Potser el *versus* anglosaxó, amb un sentit de contraposició, s'hauria de substituir pel *versus* original llatí amb un sentit de moviment, d'avenç *vers* alguna cosa. En cadascun dels exemples que s'han apuntat, un dels dos termes pot contribuir a avançar cap a l'altre, a reforçar-lo, a consolidar-lo.

Un exemple d'aquesta complementarietat en l'educació matemàtica entre l'experimentació amb materials i l'abstracció és l'activitat original de Pere Puig Adam que es descriu tot seguit i que vaig conèixer gràcies a Josep Rey, que l'estava treballant amb el propòsit de convertir-la en un mòdul per al Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA). Es tracta d'una proposta que ja apareix en el llibre *Didàctica matemàtica heurística* de Pere Puig Adam (1956) com a base d'una lliçó que ell titula «Iniciación al cálculo con irracionales cuadráticos». També la va publicar el mateix any a la revista belga *Mathematica & Pedagogica* (núm. 10).

Repartim entre els alumnes un bon nombre de peces triangulars com la de la figura blava (triangles rectangles isòscoles el catet del quals mesura una unitat) i peces ròmbiques com la de la figura taronja (rombes de costat unitat i altura $\frac{\sqrt{2}}{2}$):



D'entrada, convé manipular les peces, moure-les, comparar-les. Després podem preguntar als alumnes els valors dels perímetres d'aquestes figures, dels seus angles interiors, de les seves àrees... Veurem que l'àrea del triangle val $\frac{1}{2}$ i la del rombe val $\frac{\sqrt{2}}{2}$ unitats quadrades. Això serà important més endavant en l'activitat!

Convidarem els alumnes a construir, amb aquestes peces, figures diverses i, un cop ens haurem familiaritzat amb el material i haurem construït petits mosaics, es pot plantejar la pregunta següent: «Seria possible construir una figura formada tan sols per triangles que tingués la mateixa àrea que una figura formada tan sols per rombes?». La descoberta que això és impossible es deriva de la incommensurabilitat de $\sqrt{2}$. Una bonica relació entre aritmètica

1. G. Pólya, On Learning, Teaching and Learning Teaching. *American Mathematical Monthly*, 70, 1963, 605-619.

i geometria! I encara podem avançar un pas més fent descobrir el que diu Puig Adam: «L'àrea de tota figura composta de triangles i de rombes tindrà una part racional procedent tan sols dels triangles i una part irracional procedent tan sols dels rombes».

A continuació, mostrem als alumnes un quadrat format per una combinació de triangles i rombes com el de la figura següent, extreta del mateix llibre de Puig Adam.



Tapem immediatament aquest mosaic quadrat deixant tan sols al descobert una petita franja en un dels costats, com en la figura següent.



I preguntem: «Observant tan sols aquesta petita banda del mosaic, podríem deduir quants triangles i quants rombes el componen?». Sembla una pregunta agosarada amb la petita informació de què disposem!

Observant la imatge, deduirem que la mesura del costat del quadrat és $4 + 2\sqrt{2}$. El càlcul de l'àrea és un exercici aritmètic:

$$\text{Àrea} = (4 + 2\sqrt{2})^2 = 16 + 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2} + 4 \cdot 2 = 24 + 16\sqrt{2}.$$

A partir d'aquí, el raonament, emprant les deduccions fetes en les exploracions inicials, és molt elegant:

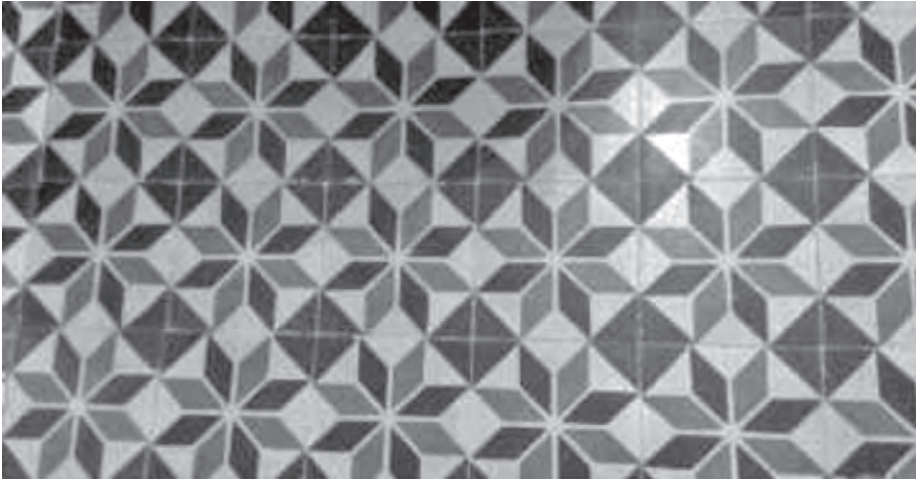
- La part racional de l'expressió de l'àrea es deurà als triangles que tenen àrea $\frac{1}{2}$, de manera que necessàriament hi haurà d'haver 48 triangles.
- La part irracional provindrà dels rombes que tenen àrea $\frac{\sqrt{2}}{2}$; per tant, hi haurà 32 rombes.

És sorprenent que, gràcies a la independència de la part racional i de la part irracional de l'expressió de l'àrea, coneixent tan sols una petita franja en un dels costats del quadrat n'hem pogut deduir tota la composició.

Raonaments semblants es poden repetir amb diversos mosaics quadrats que construeixin els alumnes i també amb mosaics rectangulars (en aquest cas, per esbrinar el nombre de peces de cada tipus, caldrà conèixer tant la base com l'altura). Sempre podrem deduir (sense veure-ho!) el nombre de triangles i el nombre de rombes que hi ha en cada composició. Es tracta d'una inesperada aplicació, en el camp de la geometria, de la separació entre la part racional i la part irracional d'una expressió aritmètica.

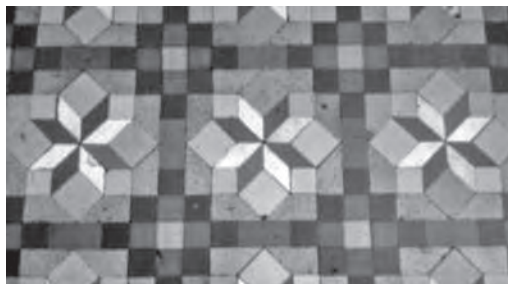
Sobre l'origen d'aquesta activitat, Pere Puig Adam afirma: «La incommensurabilitat de les àrees d'aquestes peces em suggerí una lliçó activa sobre irracionals quadràtics i el seu càlcul». Es tracta d'un exemple perfecte per il·lustrar el fet que comentàvem al principi: malgrat ser una activitat d'experimentació amb materials, ni és elemental en el nivell en què és adequada ni està allunyada de l'abstracció. Ben al contrari, permet apropar-nos, d'una manera pràctica i amb un punt de sorpresa, a aspectes tan profunds com la irracionalitat de $\sqrt{2}$ i la incommensurabilitat d'una magnitud respecte d'una unitat. La geometria i els nombres tenen aquí un esplèndida trobada!

Precisament trobem aquestes peces en un mosaic de l'ermita de Sant Cristina de Lloret de Mar, com ho mostra la fotografia següent.²



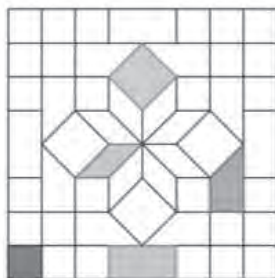
En aquest mosaic s'hi poden observar quadrats de costat $4 + 2\sqrt{2}$ que, a més, tenen una configuració ben diferent de la del quadrat que mostra Puig Adam... però no podria ser d'altra manera, ja que tenen el mateix nombre de peces de cada tipus! Un magnífic enllaç contextual per a l'activitat descrita!

Amb companys matemàtics comentàvem aquesta activitat tot dinant en un restaurant de Barcelona quan vam «descobrir» que el mosaic que trepitjàvem també oferia una oportunitat excel·lent per treballar idees matemàtiques (vegeu la imatge).



2. Fotografia feta per Sílvia Margelí.

Construir aquest mosaic amb GeoGebra (vegeu la figura següent) és una bona manera de comprendre la seva estructura. Prenent el costat del quadrat blau com a unitat, amb raonaments geomètrics fàcils i bonics podrem deduir els costats i les àrees de les cinc figures que formen el mosaic: quadrats petits (com el de color blau), de costat 1 unitat i d'àrea 1 unitat quadrada; rectangles (com el de color gris), de costats 1 i 2 unitats i d'àrea 2 unitats quadrades; trapezis (com el de color vermell), de costats 2, 1, 1 i $\sqrt{2}$ unitats i d'àrea 1,5 unitats quadrades; quadrats grans (com el de color taronja), de costat $\sqrt{2}$ unitats i d'àrea 2 unitats quadrades, i romboides (com el de color verd), de costats 1 i $\sqrt{2}$ unitats i d'àrea 1 unitat quadrada.



Aquesta relació entre la unitat i $\sqrt{2}$ que hem observat tant en el mosaic de Puig Adam com en el del terra del restaurant, també la trobem d'una manera evident en les rajoles de cartabó: les tradicionals rajoles quadrades dividides per la diagonal en un triangle groc i un de verd. Fa poc, la Sílvia Margelí em va fer arribar un magnífic recurs didàctic: una abundant col·lecció de rajoles de cartabó de ceràmica en miniatura per poder emprar còmodament a classe (5 cm de costat). A partir d'un motiu molt simple, amb aquestes rajoles es pot crear un gran nombre de mosaics en els quals és fàcil identificar les transformacions geomètriques implicades (isometries: translacions, simetries i girs) oferint un munt d'oportunitats de treball a classe inventant, reproduint i analitzant mosaics. Sorpren l'abundància de possibles composicions que ofereixen aquestes rajoles. En les quatre figures següents se'n presenten algunes.



L'element de l'ARC «Fem un terra de rajoles (amb GeoGebra)», de Bernat Ancochea i Isabel Sorigué, fa una magnífica proposta per treballar amb una versió digital d'aquestes rajoles a l'educació infantil (<http://apliense.xtec.cat/arc/node/1319>).

El MMACA té un mòdul amb quatre rajoles de cartabó formant un quadrat situat entre dos miralls paral·lels, com mostra la fotografia. Observant la imatge que es produeix sobre un d'aquests miralls, fruit de successives composicions de simetries, descobrirem una sanefa infinita l'estructura de la qual depèn de com posem les quatre rajoles «reals». Si posem quatre miralls, un a cada costat del quadrat, obtindrem un mosaic que s'estendrà cap a l'infinit. No és difícil reproduir aquesta experiència a l'escola.



És freqüent observar les rajoles de cartabó en la decoració d'espais públics o privats. Així, per exemple, les trobem en el magnífic mosaic del perímetre del pati de la Casa de Convalescència (part de l'antic Hospital de la Santa Creu a Barcelona, segle XVII), seu de l'Institut d'Estudis Catalans, o en els bancs del Passeig Marítim de Sitges, sobre els quals hi ha una interessant proposta d'activitat al bloc PuntMat (<http://puntmat.blogspot.com.es/2012/04/bancs-del-passeig-maritim-de-sitges.html>).

Malgrat que no és intenció d'aquest escrit fer una descripció general de l'ús dels mosaics en l'ensenyament de les matemàtiques i obrint la perspectiva a tota mena de mosaics, és imprescindible esmentar les idees de treball sobre sanefes i mosaics que apareixen en el llibre *Passeig matemàtic per Catalunya* de Teresa Ticó, les propostes de José Antonio Mora sobre mosaics emprant GeoGebra (<http://jmora7.com>) i les que es descriuen en diversos elements de l'ARC.

Les activitats que s'han comentat mostren que l'experimentació amb recursos materials pot fer-se en qualsevol etapa educativa i que, a través seu, poden posar-se en joc aspectes profunds de la matemàtica. El professor israelià Abraham Arcavi, en un cicle de conferències organitzat pel CREAMAT, va afirmar: «La visualització no és un guarniment, sinó una manera de pensar». Potser podríem fer una afirmació semblant amb referència a l'experimentació amb materials manipulables. Els recursos materials no són frivolitats ni trivialitzacions, són instruments potents per comunicar i per construir que conviden a la reflexió i que permeten treballar idees de fons! Per això encapçalàvem aquest escrit amb el títol «Materials per construir mosaics... i matemàtiques!».